MAI 1 – 9. cvičení „písemné“ (náhradní za 16.4.2020)

I. Aplikace derivace funkce v bodě – rovnice tečny ke grafu funkce, lineární aproximace funkce:

„Teorie“ (shrnutí):

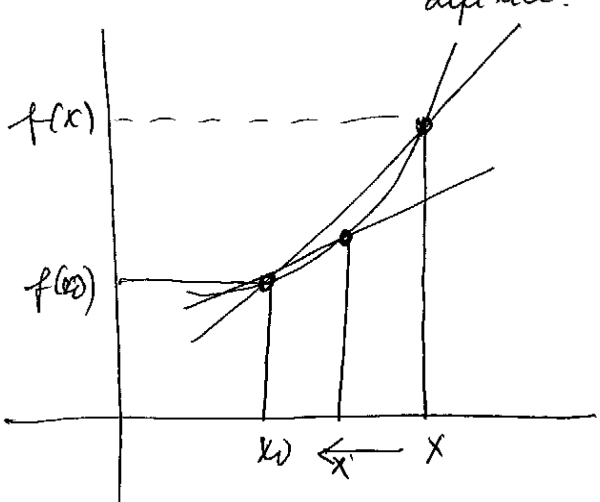
Je-li $f : U(x_0) \subset R \to R$, a existuje-li $f'(x_0) \in R$, pak tečnou ke grafu f v bodě $(x_0, f(x_0))$ se nazývá přímka o rovnici

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

a $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \omega(x - x_0)$, kde $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\omega(x - x_0)}{x - x_0} = 0$

– tedy: ex.-li $f'(x_0) \in R$, můžeme f v okolí bodu x_0 aproximovat lineární funkcí (jejímž grafem je tečna ke grafu f v bodě $(x_0, f(x_0))$) s „chybou“ $\omega(x - x_0)$, která nejenom jde k nule pro $x \to x_0$, ale „rychleji“ než $x - x_0$.

„Geometrické“ vysvětlení je v 6. přednášce (str. 29) – připomeneme si:



definice: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$;

$k(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ je směrnice přímky, která prochází body $(x_0, f(x_0))$ a $(x, f(x))$ grafu f, pro $x \to x_0$ dostaneme $f'(x_0)$ jako limitu směrnic sečen, je pak „vidět“, že je rozumné přímku, která má „za“ směrnici limitu směrnic $\lim\limits_{x \to x_0} k(x)$ nazývat tečnou ke grafu (body $(x_0, f(x_0))$ a $(x, f(x))$ pro $x \to x_0$ „jdou“ k sobě)

A jednoduché příklady (některé vyřešíme, zbývající buď budete považovat za zřejmé, a nebo si je „zkusíte" sami)

1) Máme najít rovnici tečny ke grafu fce f v bodě $(x_0, f(x_0))$:

a) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$: $f(0) = 0$, $f'(0) = \cos 0 = 1$, tedy tečna ke grafu sinu v počátku je $y = x$

(dávám tento jednoduchý příklad sem proto, že tato tečna je nápomocná pro „dobrý" načrtnutí grafu fce sin i arcsin)

$f(x) = \arcsin x$, $x_0 = 0$: $f(0) = \arcsin 0 = 0$, $f'(0) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big|_{x=0} = 1$,

tedy opět, $y = x$ je rovnice tečny ke grafu $\arcsin x$ v $[0,0]$

a zkuste (nebo aspoň si uvědomte), že $y=x$ je tečnou v $[0,0]$ i ke grafům fce $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{arctg} x$.

b) $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x_0 = 0$: $f(0) = 1$, $f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}\Big|_{x=0} = \frac{1}{2}$, tedy,

$y = 1 + \frac{1}{2}x$ je rovnice tečny v bodě $[0,1]$

analog. pro $f(x) = \sqrt[n]{1+x}$, $x_0 = 0$: $f(0) = 1$, $f'(0) = \frac{1}{n}$,

tj. rovnice tečny v $[0,1]$ je $y = 1 + \frac{1}{n}x$

(omlouvám se, tohle patří „až" do příkladu 2b – ale tam ty tečny využijeme k lineární aproximaci (viz Tabule):

Ex.-li $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, pak v $U(x_0)$ je

$$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \left(\text{a chyba } \lim_{x \to 0} \frac{\omega(x-x_0)}{x - x_0} = 0\right)$$

a grafem lineární aproximace v okolí bodu x_0 je tečna v $(x_0, f(x_0))$)

Tedy, příklad 2.

a) protože už máme rovnici tečny ke grafu sinu v [0,0], víme, že:

$\sin x \cong x$ pro „malá" x (tj. v okolí bodu $x_0=0$)

a podobně i

$\arcsin x \cong x$, $\operatorname{arctg} x \cong x$, $\operatorname{tg} x \cong x$ v okolí bodu $x_0=0$

b) jelikož už jsem (omylem) napsala i rovnici tečny ke grafu $f(x)=\sqrt{1+x}$ v bodě [0,1], tak víme, že

$\sqrt{1+x} \cong 1+\frac{1}{2}x$ pro „malá" x a též

$\sqrt[n]{1+x} \cong 1+\frac{1}{n}x$ pro „malá" x

c) $\ln(x+1) \cong x$ pro $x \in U(0)$, neboť:

je-li $f(x)=\ln(x+1)$, pak $f(0)=\ln 1=0$, $f'(0)=\frac{1}{x+1}\Big|_{x=0}=1$,

a tedy, dle „vzorce pro lineární aproximaci" je skutečně

$\ln(x+1) \cong x$ pro $x \in U(0)$

podobně pro $f(x)=e^x$, $x \in U(0)$:

$f(0)=e^0=1$, $f'(0)=e^0=1$, tj. $e^x \cong 1+x$

d) (– jen cvičení derivací „horších" funkcí):

$f(x)=\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$: $f(0)=\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$,

$x_0=0$

$$f'(0)=\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}\cdot\frac{-2}{(x-1)^2}\Bigg|_{x=0}=-1,$$

tj.: $f(x) \cong -\frac{\pi}{4}-x$ $\quad (=f(0)+f'(0)\cdot x)$

a ukázal, že $\ln(1+\sin(4x)) \cong 4x$ pro x – malá, je též

jednoduché: je-li $f(x) = \ln(1+\sin(4x))$, pak

$$f(0) = \ln 1 = 0, \quad f'(0) = \frac{1}{1+\sin(4x)} \cdot \cos(4x) \cdot 4 \Big|_{x=0} = 4,$$

tj. $\ln(1+\sin(4x)) \cong 0 + 4 . x$ (cbd.)
(pro x – malá)

3. Jen taková „pretné" ukázka, jak „fenguje" ta lineární aproximace:

např.:

dle nás – lin. aproximace	dle kalkulačky (u mne)
$\arcsin(0{,}2) \cong 0{,}2$	$0{,}20135\ldots$
$\arcsin(0{,}02) \cong 0{,}02$	$0{,}0200013$
(všimněte si „chyby")	
$\sqrt{1{,}06} \cong 1 + \frac{1}{2} 0{,}06 = 1{,}03$	$1{,}02956\ldots$
$\ln(1{,}02) \cong 0{,}02$	$0{,}019802$
$e^{0{,}1} \cong 1{,}1$	$1{,}1051\ldots$
$e^{0{,}01} \cong 1{,}01$	$1{,}010050\ldots$

4. Ještě jedna „ukázka" vztahu „chyby při lineární aproximaci a změny proměnné" (viz „tabule"):
Zkusíme příklad pro objem koule, pro pořádek si vyzkoušejte také:
Objem koule o poloměru $R > 0$ je $V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$
Nyní „změníme" poloměr o ΔR a srovnáme „změnu" V, tj. $V(R+\Delta R) - V(R)$ s lineární aproximací této „změny":

$$\Delta V = V(R+\Delta R) - V(R) = \frac{4}{3}\pi\left[(R+\Delta R)^3 - R^3\right] =$$

$$= \frac{4}{3}\pi\left[3R^2\Delta R + 3R(\Delta R)^2 + (\Delta R)^3\right]$$

a linearizace ΔV je

$$\Delta V = V'(R)\cdot\Delta R$$

$$V'(R) = 4\pi R^2, \text{ tj. } \Delta V = 4\pi R^2 \Delta R \qquad (*)$$

a z (*) je krásně „vidět" chyba lineární aproximace:

$$\omega(\Delta R) = \frac{4}{3}\pi\left(3R(\Delta R)^2 + (\Delta R)^3\right),$$

tj. „vidíme", že $\lim\limits_{\Delta R\to 0}\dfrac{\omega(\Delta R)}{\Delta R} = \lim\limits_{\Delta R\to 0}\dfrac{4}{3}\pi\left(3R\Delta R + (\Delta R)^2\right) = 0$!

(Máte-li chuť, zkuste si „udělat" totéž pro povrch koule.)

II. Užití monotonie funkce („získané" za pomocí $f'(x)$) k důkazu nerovností:

1. $e^x \geq 1+x, \; x\in R$

(pro $x \geq 0$ je nerovnost „vidět" z definice exponenciely nekonečnou (Maclaurinova řada))

zde: ? $e^x \geq 1+x$ v R $\Leftrightarrow$? $f(x) = e^x - 1 - x \geq 0$ v R

a platí: $f(0)=0$; $f'(x) = e^x - 1$, tj. $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

$f'(x) > 0$ v $(0,+\infty) \Rightarrow f$ je rostoucí v $\langle 0,+\infty)$ (f je spojitá v $\langle 0,+\infty)$)

$f'(x) < 0$ v $(-\infty,0) \Rightarrow f$ je klesající v $(-\infty,0\rangle$ (—"— v $(-\infty,0\rangle$

tedy, f má v bodě $x=0$ ostré lokální i globální minimum,
tj. $f(x) \geq f(0)=0$, což jsme měli ukázat.

(navíc, díky tomu, že $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(e^x-x-1)=+\infty$, i
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(e^x-x-1)=+\infty$, a f je spojitá v R, je vidět, že má minimum v R)

2. $\ln x \leqq x-1$ v $(0,+\infty)$ – zkuste za dú

3. $x-\frac{x^3}{6} < \sin x < x$, $x\in(0,+\infty)$

(všimněte si, že je to vlastně $T_3^{\sin x,0}(x) < \sin x < T_1^{\sin x,0}(x)$)
$x\in(0,+\infty)$

a) ukážeme, že $\sin x < x$ pro $x\in(0,+\infty)$ („je vidět" z grafu a toho, že $y=x$ je tečna ke grafu sinu v $[0,0]$)

– stačí ukázat, že $g_1(x) = x-\sin x > 0$
v $(0,+\infty)$ (stačí v $(0,\frac{\pi}{2})$)

$$\left.\begin{aligned} &g_1(0)=0,\quad g_1'(x) = 1-\cos x > 0 \ \text{ v } (0,\tfrac{\pi}{2}) \\ &g_1 \text{ je spojitá v } \langle 0,\tfrac{\pi}{2}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow g_1 \text{ je rostoucí v } \langle 0,\tfrac{\pi}{2})$$

a tedy $g_1(x) > 0$ v $(0,\frac{\pi}{2})$,
dále pro $x\in\langle\frac{\pi}{2},+\infty)$ zřejmé

b) ukážeme, že $x-\frac{x^3}{6} < \sin x$ pro $x\in(0,+\infty)$:
opět, je-li $g_2(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$, je $g_2(0)=0$, a vyšetříme „monotonii" $g_2(x)$ v $(0,+\infty)$ – opět by se hodilo, kdyby $g_2(x)$ byla funkce rostoucí v $\langle 0,+\infty)$: tedy:

? $g_2'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} > 0$? v $(0,+\infty)$ – nevidíme, ale

$g_2'(0)=0$, $g_2''(x) = -\sin x + x > 0$ v $(0,+\infty)$ (dle a), tedy

odkud dostaneme, že $g'(x)$ je funkce rostoucí v $\langle 0,+\infty)$
(je spojitá v $\langle 0,+\infty)$) $g'(0)=0 \Rightarrow g'(x)>0$ v $(0,+\infty)$,
což už stačí pro to, co máme dokázat –
$g_2(0)=0$, $g_2'(x)>0$ v $(0,+\infty)$, g_2 je spojitá v $0 \Rightarrow g_2$ je rostoucí
v $\langle 0,+\infty) \Rightarrow g_2(x) = \sin x - x + \frac{x^6}{6} > 0 \ (=g_2(0))$ v $(0,+\infty)$.

Podobně se dá vyšetřovat i příklad 4 – zkuste za dú
(řešení těž napíšu „za čas")

III. Užití Lagrangeovy věty o střední hodnotě:

1. Ukažte (spíše ukažme), že pro $\forall x,y \in R$ platí
   (i) $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$
   a(ii) $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leq |x-y|$.

ukažme si třeba (ii):

zvolme $x,y \in R$, (BÚNO) $x<y$;
v $\langle x,y\rangle$ je $f(x)=\operatorname{arctg} x$ funkce spojitá, ex. $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ v $(x,y) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ (dle Lagrangeovy věty) ex. z, $x<z<y$ (nějaké $z=z(x,y)$)
tak, že

$$\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+z^2}(y-x) \quad \text{a tedy}$$

$$\underline{|\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} x|} = \frac{1}{1+z^2}|y-x| \leq \underline{|y-x|}$$

$$\left(\text{neboť } \frac{1}{1+z^2} \leq 1 \quad \forall z \in R\right)$$

Myslím, že teď „vidíte", jak se ukáže, že platí (i)
a zobecnění – jistě na nějaké přijdete, tak to přijďte
ke dni – „1 bod" navíc!

2. A jak může Lagrangeova věta pomoci při výpočtu limit?

(i) $$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{\sqrt{x+1}}-e^{\sqrt{x}}\right) = „\infty-\infty" = ?$$

Uvažujme funkci $f(x)=e^{\sqrt{x}}$ pro $x>0$ (stačí třeba i $x>10$)
a pak, užijeme-li Lagrangeovu větu „na" interval
$\langle x,x+1\rangle$, máme ($f(x)$ je spojitá v $\langle x,x+1\rangle$, ex.
$f'(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ pro $x\in(0,+\infty)$, tj. i v $(x,x+1)$ pro $\forall x>0$):

$\exists\, \xi(x)$, $x<\xi(x)<x+1$ tak, že $f(x+1)-f(x)=f'(\xi(x))\cdot 1$

tj. $e^{\sqrt{x+1}}-e^{\sqrt{x}}=\dfrac{e^{\sqrt{\xi(x)}}}{2\sqrt{\xi(x)}}$, a tedy

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{\sqrt{x+1}}-e^{\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\sqrt{\xi(x)}}}{2\sqrt{\xi(x)}}\underset{VLSF}{=}\lim_{y\to\infty}\frac{e^{y}}{2y}=\underline{+\infty}$$

(„známá" limita)

Užili jsme věty o limitě složené funkce: $y=\xi(x)$:
$$\xi(x)>x,\ \lim_{x\to\infty}x=\infty \underset{VOS}{\Rightarrow} \lim_{x\to\infty}\xi(x)=+\infty$$

A „klasický" výpočet, tj. upravení?

Něco jsem zkusila, třeba budete mít nápad lepší,
ale zdá se, že je tento výpočet mnohem „složitější":

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{\sqrt{x+1}}-e^{\sqrt{x}}\right)=„\infty-\infty"\underset{„\text{na součin}"}{=}\lim_{x\to\infty}e^{\sqrt{x}}\left(e^{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}-1\right)=„\infty\cdot 0"\overset{*}{=}$$

(neboť $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=„\dfrac{1}{\infty}"=0$) – a dále
na podíl na str. 9 (?):
nebo jinak?

$$\overset{*}{=} \lim_{x\to\infty} e^{\sqrt{x}} \underbrace{\left(\frac{e^{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} \right)}_{\to 1} \cdot \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) \underset{(**)}{\overset{AL}{=}} "1\cdot\infty" = \underline{\infty}$$

(VLSF + T : $\sqrt{x+1}-\sqrt{x} \to 0$ pro $x \to +\infty$)

! použijeme „základní" limitu $\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$!

a nyní snad už jen (dle AL): $\lim_{x\to\infty} e^{\sqrt{x}} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) = "\infty \cdot 0" =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}_{\to\infty} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}}_{\to \frac{1}{2}} = \infty$$

a pak už (**).

(ii) – „podobně", zkuste přidat k DÚ 9 (opět + 1 bod)

3) Je-li $f'(x) = g'(x) \in R$ pro $x \in (a,b)$, pak existuje konstanta $C \in R$ tak, že $g(x) = f(x) + C$, $x \in (a,b)$
(to je už integrál, tak „to" ví, budete potřebovat)

<u>zkuste v DÚ (také 3. příklad) – návod</u>: vezměte funkci

$h(x) = f(x) - g(x)$ v (a,b), pak $h'(x) = 0$ v (a,b)

a užijte Lagrangeovu větu pro lib. body $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in (a,b)$

(a věta přijde i na „něco jiného")

IV. Taylorův polynom:

1a) – „na" přednášce 9. byly pro fce e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(x+1)$ ukázány dokonce Maclaurinovy řady, částečné součty těchto řad jsou právě Taylorovy polynomy v bodě $a=0$ – takže toto už nemusíme „probírat" – ale pokud by byly jakékoliv otázky, napište, pokusíme se o vysvětlení.

1b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $a=0$, $n=3$ – ? $T_3^{\operatorname{arctg} x, 0}(x) = ?$

obecně: $T_3^{f,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$

tedy připravné „akce": $f(0) = \operatorname{arctg} 0 = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = \frac{-2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3} \Rightarrow f'''(0) = -2$$

a tedy: $T_3^0(x) = x - \frac{2}{3!}x^3$, tj. $T_3^0(x) = x - \frac{x^3}{3}$

(a tak bychom mohli pokračovat: $T_5^0(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$, atd)

(a opět – $\operatorname{arctg} x$ je lichá funkce a Taylorovy polynomy „liché")

Poznámka: Maclaurinova řada pro fci $\operatorname{arctg} x$ je

$$\sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$, řada konverguje v $\langle -1, 1\rangle$

(tolik jsme ale neprobírali o řadách)

1c) Podobně – $T_2^{f,0}(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}x^2$,

tedy příklad dále už je jen „trénink derivování" :

$f(x) = \sqrt{1+3e^{-x}}$: $f(0) = 2$

$f'(x) = \dfrac{-3e^{-x}}{2\sqrt{1+3e^{-x}}}$: $f'(0) = -\frac{3}{4}$

$f''(x) = -\frac{3}{2}\left(\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{1+3e^{-x}}}\right)' =$ $f''(0) = \frac{15}{32}$ (?)

(překontrolujte, prosím)

$$= -\frac{3}{2}\,\frac{-e^{-x}\sqrt{1+3e^{-x}} - \dfrac{e^{-x}(-3e^{-x})}{2\sqrt{1+3e^{-x}}}}{1+3e^{-x}}$$

$$f''(0) = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(-2+\frac{3}{4}\right)$$

Tedy zatím: $T_2^{f,0}(x) = 2 - \frac{3}{4}x + \frac{15}{64}x^2$

($f(x) = \ln(1+\sin 2x)$ a $T_2^{f,0}(x)$ je v dú 9)

3. (příklad 2. na další straně)

a) odhad chyby v aproximaci (tj. odhad „zbytku" Taylorova polynomu)

: $e^x \cong 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ v $\langle 0,1\rangle$:

Lagrangeův tvar zbytku: $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}$, $f(x) = e^x$,
(pro $T_n^{e^x,0}(x)$:) $\xi \in (0,1)$

tj. máme : $|R_n(x)| = \dfrac{e^{\xi}}{(n+1)!}\,x^{n+1} \leq \dfrac{3}{(n+1)!}$ (neboť v $\langle 0,1\rangle$ je $R_n(x) \geq 0$)

($e^{\xi} < 3$ v $\langle 0,1\rangle$, $x^{n+1} \leq 1$)

3b) Zkuste sami odhad chyby při aproximaci

$$\sin x \cong x - \frac{x^3}{3!} \qquad \text{pro } |x| \leqq \frac{1}{2}$$

(ale zkuste i použít Lagrangeův tvar zbytku pro T_4 !)

4. a) zkuste něco podobného jako u lineární aproximace (příklad I/3) pomocí polynomu Taylora 2. stupně – – v prosinci, omluvte mne, zapomněla jsem napsat stupeň polynomu)

b) $f(x) = x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2$ – máme spočítat $f(1{,}03)$ a $f(1{,}001)$ a nemáme kalkulačku – – můžeme aproximovat v okolí bodu $a=1$ Taylorovým polynomem (vezměme $n=2$):

$f(1) = 1-3+1+2 = 1$

$f'(x) = 10x^9 - 18x^5 + 2x \quad , \quad f'(1) = -6$

$f''(x) = 90x^8 - 90x^4 + 2 \quad , \quad f''(1) = 2$

tedy: $x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2 \cong 1 - 6(x-1) + \frac{2}{2!}(x-1)^2$,

tj. $x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2 \cong 1 - 6(x-1) + (x-1)^2$,

a $f(1{,}03) \cong 1 - 6 \cdot 0{,}03 + 0{,}0009 = 0{,}8209$ (zkontrolujte)

(a kalkulačka – raději také zkontrolujte: $\cong 0{,}82265\ldots$)

$f(1{,}001) \cong 1 - 6 \cdot 0{,}001 + (0{,}001)^2 = \ldots$

A na závěr – limity dvě (složitější limity zkuste v díle 9)

2. příklad (ze IV): (první limita je jednoduchá – ukazuje „princip užití Taylorova polynomu")

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$ = (užijeme „Taylora" 3. stupně – „kvůli jmenovateli" x^3 !)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + R_3(x) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{6} + \frac{R_3(x)}{x^3}\right) = -\frac{1}{6},$$

neboť („Peanův" tvar zbytku) je $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{R_3(x)}{x^3} = 0$!

(samozřejmě můžete tuto limitu spočítat „l'Hospitalem")

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(x+1)}{x^3}$ = (opět budeme potřebovat (kvůli jmenovateli) polynom 3-ho stupně pro $e^x \sin x$ pro $a=0$ – můžeme polynom vyrobit „přímo" nebo asi i násobením Taylorových polynomů e^x, $\sin x$)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x + x^2 + \frac{x^3}{3} + R_3(x) - x^2 - x}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3} + \underbrace{\frac{R_3(x)}{x^3}}_{\to 0}\right) = \frac{1}{3}$$

Zkusme „přímo" $T_3^{f,0}(x)$ pro $f(x) = e^x \sin x$:

$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$, $f'''(0) = 2$

$f'(x) = e^x(\sin x + \cos x)$

$f''(x) = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x$

$f'''(x) = 2e^x(\cos x - \sin x)$

tj. $T_3^{f,0}(x) = x + \frac{2}{2}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 = x + x^2 + \frac{x^3}{3}$